Chap 6 Vecteurs gaussiens

i) $\forall u,\ \phi_{X_n}(u) \longrightarrow \phi_X(u)$

$\Leftrightarrow\ X_n \xrightarrow[n\infty]{\mathcal{L}} X$

ii) $\phi_X = \phi_Y \Leftrightarrow X \overset{\mathcal{L}}{=} Y$

iii) $\forall (u_1, \dots u_n) \in \mathbb{R}^n$,

$\phi_{(X_1,\dots X_n)}(u_1,\dots u_n) = \prod_{i=1}^{n} \phi_{X_i}(u_i)$

$\Leftrightarrow X_1, \dots X_n$ sont $\perp\!\!\!\perp$.

I. Rappel :

$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\phi_X(u) = \mathbb{E}[e^{iux}] = \exp\left(imu - \frac{\sigma^2 u^2}{2}\right)$$ fonction caractéristique

$\boxed{\text{Prop 1}}$ i) $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors

$$m + \sigma Y \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$$

- fonction de répartition (vu)
- fonction caractéristique
- par le point ii) :
  $m \sim \mathcal{N}(m, 0)$
  $\sigma Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

Pour les moments de Y,
on développe l'identité en série de u :

$$\mathbb{E}[e^{iuY}] = e^{-\frac{u^2}{2}},$$

peut être justifié

* à gauche : $\mathbb{E}\left[\sum_{n\geq 0} \frac{(iuY)^n}{n!}\right] = \sum_{n\geq 0} \frac{(iu)^n}{n!} \mathbb{E}[Y^n]$

* à droite : $\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{2^k k!} u^{2k}$

On compare les coefficients :

* coef devant u^{2k+1} : $\mathbb{E}[Y^{2k+1}] = 0$

* coef devant u^{2k} : $\frac{(-1)^k}{(2k)!} \mathbb{E}[Y^{2k}] = \frac{(-1)^k}{2^k k!}$,

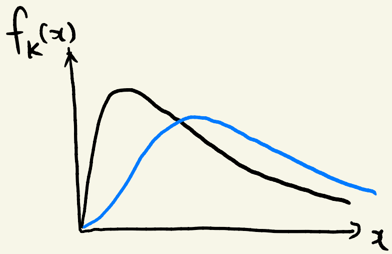
d'où $\mathbb{E}[Y^{2k}] = \frac{(2k)!}{2^k k!}$

Cor 2 Soient $X_1, \dots X_n$ des gaussiennes indépendantes, $a_0, a_1, \dots a_n \in \mathbb{R}$, alors $\underbrace{a_0 + a_1 X_1 + \dots + a_n X_n}_{\text{combinaison affine}}$ est gaussienne.

$a_0 \to \mathcal{N}(a_0, 0)$

Déf 3 $X_1, \dots X_k$ i.i.d. $\sim \mathcal{N}(0,1)$

$Y = X_1^2 + \dots + X_d^2 \sim \chi^2(k)$: la loi du χ^2 à k degrés de liberté



Prop 4 Si $Y \sim \chi^2(k)$, alors $\mathbb{E}[Y] = k$ et $Var(Y) = 2k$.

Dém : On pose X_i i.i.d. $\sim \mathcal{N}(0,1)$, $Y = \sum_{i=1}^{k} X_i^2 \sim \chi^2(k)$.

Par la proposition 1, $\mathbb{E}[X_i^2] = 1$, $\mathbb{E}[X_i^4] = \frac{4!}{2^2 2!} = 3$.

$Var(X_i^2) = 2$.

Donc $\mathbb{E}[Y] = k\,\mathbb{E}[X_i^2] = k$,

$Var(Y) = k\, Var(X_i^2) = 2k$ $\boxtimes$

II Vecteurs gaussiens

Not° : * Si $A \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{R})$, on note ${}^tA$ sa transposée.

* Produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$:

$x = {}^t(x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = {}^t(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,

on définit $\langle x, y \rangle = {}^t x\, y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique si ${}^tM = M$. Elle est positive si $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\langle Mx, x \rangle \geq 0$; définie positive si $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\langle Mx, x \rangle > 0$.

Rq : Si $M = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, $x = {}^t(x_1, \dots x_n)$,

$$\langle Mx, x \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

$\langle Mx, x \rangle = {}^t x\, {}^t M x = {}^t x M x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i a_{ij} x_j$

1) Définitions et propriétés

$\boxed{\text{Déf 5}}$ $X = {}^t(X_1, \dots X_n)$ est un vecteur gaussien si $\forall a \in \mathbb{R}^n$, $\langle a, X \rangle$ est gaussienne.

En particulier si X_i sont des gaussiens indépendants, alors ${}^t(X_1, \dots X_n)$ est un vecteur gaussien (Toute combinaison linéaire des X_i est gaussien).

Rq : * Si X est un vecteur gaussien dans $\mathbb{R}^n$, alors chacune de ses coordonnées est gaussienne. On prend $e_i = {}^t(0, \dots 0, \underset{i\text{è}}{1}, 0, \dots 0)$, par déf, $\underbrace{\langle e_i, X \rangle}_{X_i}$ est gaussienne.

$X \sim \sum_{i=1}^{k} p_i \delta_{m_i}$ $\quad \sum p_i = 1$

$\mathbb{P}(X = m_i) = p_i \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$

$\star$ La réciproque est fausse :

Si $X_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $\varepsilon = \frac{\delta_1 + \delta_{-1}}{2}$ $\left(\mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(\varepsilon = -1) = \frac{1}{2} \right)$

avec $X_1 \perp\!\!\!\perp \varepsilon$, alors $X_2 = \varepsilon X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Pourtant ${}^t(X_1, X_2)$ n'est pas un vecteur gaussien,

car $\mathbb{P}(X_1 + X_2 = 0) = \frac{1}{2}$ donc $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \right\rangle$

n'est pas gaussienne.

Déf 6 $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$, $\mathbb{E}[X] = \begin{pmatrix} \mathbb{E}[X_1] \\ \vdots \\ \mathbb{E}[X_n] \end{pmatrix}$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} Var(X_1) & Cov(X_1,X_2) & \cdots & Cov(X_1,X_n) \\ \vdots & Var(X_2) & & \vdots \\ & & \ddots & \\ Cov(X_n,X_1) & \cdots & & Var(X_n) \end{pmatrix} \qquad \left(Cov(X_i, X_j) \right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

Prop 7 $\forall u \in \mathbb{R}^n, \langle \Gamma u, u \rangle = Var(\langle u, X \rangle)$

$Cov(\lambda X, Y) = \mathbb{E}[\lambda XY] - \mathbb{E}[\lambda X]\mathbb{E}[Y]$
$= \lambda \mathbb{E}[XY] - \lambda \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$
$= \lambda \, Cov(X,Y)$

Dém : $\langle \Gamma u, u \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} Cov(X_i, X_j) u_i u_j$

Γ X, Y VA, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda Cov(X,Y) = Cov(\lambda X, Y) = Cov(X, \lambda Y)$

X_1, X_2, Y VA, alors $Cov(X_1 + X_2, Y) = Cov(X_1, Y) + Cov(X_2, Y)$

$Cov(Y, X_1 + X_2) = Cov(Y, X_1) + Cov(Y, X_2)$ $\lrcorner$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} Cov(u_i X_i, u_j X_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} Cov(u_i X_i, \langle u, X \rangle)$$

$$= Cov(\langle u, X \rangle, \langle u, X \rangle)$$

$$= Var(\langle u, X \rangle) \qquad \blacksquare$$

$\boxed{\text{Prop 8}}$ Dém : Soit $u \in \mathbb{R}^n$, alors $\langle u, X \rangle$ est gaussienne.

Sa moyenne vaut $\langle u, m \rangle$,

et sa variance $Var(\langle u, X \rangle) = \langle \Sigma u, u \rangle$ (Prop 7)

Donc $\mathbb{E}[e^{i\langle u, X\rangle}] = \phi_{\langle u, X\rangle}(1)$ → fct° caractéristique d'une gaussienne 1d

$$= \exp(i\langle u, m\rangle - \frac{1}{2}\langle \Sigma u, u\rangle) \quad ▨$$

$\boxed{\text{Cor 9}}$ Les fonctions caractéristiques caractérisent la loi, donc un vecteur gaussien est caractérisé par m et Σ.

$\boxed{\text{Def 10}}$ $\mathcal{N}_n(m, \Sigma)$

2) Caractérisation de l'indépendance

$\boxed{\text{Prop 11}}$ $X_1, \dots X_n$ des VA gaussiennes. Alors

Les X_i sont indépendantes $\Leftrightarrow$ ${}^t(X_1, \dots X_n)$ est un $\underbrace{\text{vecteur gaussien}}_{①}$ $\underbrace{\text{de matrice de cov diagonale}}_{②}$.

2 conditions

Dém : $\Rightarrow$ trivial

$\Leftarrow$ On note $\Sigma = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$ la matrice de cov de ${}^t(X_1, \dots X_n)$.

⚠ ② dit que $\forall i \neq j$, $Cov(X_i, X_j) = 0$ et c'est insuffisant.

On a pour $u \in \mathbb{R}^n$,

$$\phi_{(X_1, \dots X_n)}(u) = \exp(i \underbrace{\sum_{k=1}^n m_k u_k}_{\langle m, u \rangle} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n d_k u_k^2)$$

$$= \prod_{k=1}^n \exp(i m_k u_k - \frac{1}{2} d_k u_k^2)$$

$$= \prod_{k=1}^n \phi_{X_k}(u_k)$$

Donc les X_i sont indépendantes. ▨

3) Existence de vecteurs gaussiens.

On peut facilement construire $\mathcal{N}_n(0, I_n)$, mais pourquoi $\mathcal{N}_n(m, \Sigma)$ existe pour tout $m \in \mathbb{R}^n$ et Σ une matrice symétrique positive ?

$\boxed{\text{Prop 12}}$ Si $X \sim \mathcal{N}_n(m, \Sigma)$ et $Y = AX + b$ avec $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^p$, alors $Y \sim \mathcal{N}_n(Am + b, \underbrace{A}_{p\times n}\underbrace{\Sigma}_{n\times n}\underbrace{{}^tA}_{n\times p})$.

Dém : Soit $u \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle u, AX+b\rangle = {}^tuAX + \langle u, b\rangle = {}^t({}^tAu)X + \langle u, b\rangle = \langle {}^tAu, X\rangle + \langle u, b\rangle$$

$$\begin{aligned}
\phi_Y(u) &= \mathbb{E}[e^{i\langle u, AX+b\rangle}] \\
&= e^{i\langle u,b\rangle}\mathbb{E}[e^{i\langle \underbrace{{}^tAu}_{u'}, X\rangle}] \\
&= \exp\Big(i\langle u,b\rangle + i\underbrace{\langle \overbrace{{}^tAu}^{u'}, m\rangle}_{= {}^tuAm \,=\, \langle u, Am\rangle} - \tfrac{1}{2}\underbrace{\langle \Sigma \overbrace{{}^tAu}^{u'}, \overbrace{{}^tAu}^{u'}\rangle}_{= {}^tuA\Sigma{}^tAu \,=\, \langle A\Sigma{}^tAu, u\rangle}\Big) \\
&= \exp\Big(i\langle u, \underbrace{Am+b}_{m_Y}\rangle - \tfrac{1}{2}\langle \underbrace{A\Sigma{}^tA}_{\Sigma_Y}u, u\rangle\Big) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Th 13}}$ Dém : Existence de $\mathcal{N}_n(m, \Sigma)$?

D'abord on écrit $\Sigma = A^2$ avec A sym pos

On part de $Y \sim \mathcal{N}_n(0, I_n)$, alors

$$X = AY + m \sim \mathcal{N}_n(m, \underbrace{\Sigma}_{AI_n{}^tA = A^2}) \quad \blacksquare$$

4) Densité d'un vecteur gaussien

$\boxed{\text{Prop 14}}$ $X \sim \mathcal{N}_n(m, \Sigma)$ Σ inversible. X admet pour densité :

$$\mathbb{R}^n \ni x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma}} \exp\Big(-\frac{1}{2}\langle \Sigma^{-1}(x-m), (x-m)\rangle\Big)$$

en 1d $\Sigma = \sigma^2$

5) TCL vectoriel

Th 15 $X_1, \dots X_n$ des vecteurs aléatoires i.i.d. dans $\mathbb{R}^d$

$\lceil X_i = \begin{pmatrix} X_i(1) \\ \vdots \\ X_i(d) \end{pmatrix}$!

tels que $\forall j \in \{1, \dots n\}$,

$\mathbb{E}[X_1(j)^2] < +\infty$.

On note $m = \mathbb{E}[X_1]$, $\Gamma = (\mathrm{cov}(X_1(i), X_1(j)))_{1 \leq i,j \leq d}$
sa matrice de cov.

Alors

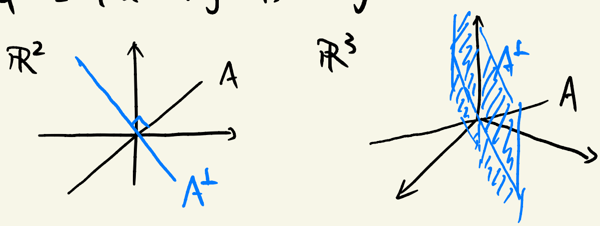
$$\sqrt{n}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - m\right) \xrightarrow[n\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_d(0, \Gamma)$$

III. Théorème de Cochran et modèles gaussiens

1) Rappel

Def 16 $\star$ $x, y \in \mathbb{R}^n$. $x \perp y$ si $\langle x, y \rangle = 0$

$\star$ $A \subseteq \mathbb{R}^n$. $A^\perp = \{x : \forall y \in A, x \perp y\}$



$\star$ BON : $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ tq $\forall i$ $\|e_i\| = 1$
$\forall i \neq j$ $e_i \perp e_j$

Def 17 Somme directe orthogonale $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_p$

$E_1 = \mathrm{Vect}(e_1, \dots e_d)$
$\vdots$
$E_p = \mathrm{Vect}(e_{n-d_p+1}, \dots e_n)$

E admet pour base $(e_i)_{i \leq n}$
$E_i = \mathrm{Vect}(e_i)$, $p = n$.

Somme directe : $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_p$ si

$\forall x \in E$, $\exists ! (x_1, \dots x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$: $x = x_1 + \dots + x_p$

+ orthogonale : Les parties E_i sont 2 à 2 orthogonales. $\forall x \in E_i, \forall y \in E_j$ $i \neq j \Rightarrow x \perp y$

Rq : On parle de projection orthogonale sur E_i :

$$\pi_{E_i} : x \longmapsto x_i \in E_i$$

Prop 18 F sev de E, alors $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$, donc $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$, et $(F^\perp)^\perp = F$. procédé de Gram-Schmidt

2) Théorème de Cochran

Th 19 $X \sim \mathcal{N}_n(0, \sigma^2 I_n)$, $\mathbb{R}^n = E_1 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} E_p$.

Alors $\pi_{E_1} X, \cdots \pi_{E_p} X$ sont des vecteurs gaussiens indépendant de lois resp. $\mathcal{N}_n(0, \sigma^2 \pi_{E_1}), \cdots \mathcal{N}_n(0, \sigma^2 \pi_{E_p})$.

$\frac{1}{\sigma^2} \| \pi_{E_i} X \|^2 \sim \chi^2(\dim E_i)$

ex : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}_2(0, I_2)$

$u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, alors $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}u_1 \overset{\perp}{\oplus} \mathbb{R}u_2$.

On a pour tout vecteur v, $\pi_{\mathbb{R}u_1} v = u_1 \langle u_1, v \rangle$
$= u_1 {}^t u_1 v$

$\pi_{\mathbb{R}u_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\pi_{\mathbb{R}u_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

indépendants

$$\pi_{\mathbb{R}u_1} X = \begin{pmatrix} \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \frac{x_1 + x_2}{2} \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}_2\left(0, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right)$$

$$\pi_{\mathbb{R}u_2} X = \begin{pmatrix} \frac{x_1 - x_2}{2} \\ \frac{-x_1 + x_2}{2} \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}_2\left(0, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right)$$

Dém : On note $d_j = \dim E_j$ et on prend $(e_1^j, \cdots e_{d_j}^j)$ une BON de E_j.

On note P la matrice de passage de la base canonique à $B = (e_1^1, \cdots e_{d_1}^1, \cdots e_1^p, \cdots e_{d_p}^p)$. P est orthogonale.

Le vecteur Y des coordonnés de X dans $\mathcal{B}$ s'écrit $Y = P^{-1}X$. Par Prop 11, $Y \sim \mathcal{N}_n(0, \sigma^2 \underbrace{P^{-1} I_n {}^tP^{-1}}_{= I_n})$

$$= \mathcal{N}_n(0, \sigma^2 I_n).$$

Or $Y = {}^t(\langle e_1^1, X\rangle, \dots \langle e_{d_1}^1, X\rangle, \dots \langle e_1^p, X\rangle, \dots \langle e_{d_p}^p, X\rangle)$,

donc les $\langle e_k^j, X\rangle$ sont i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Maintenant on regarde

$$\Pi_{E_j} X = \sum_{k=1}^{d_j} \langle e_k^j, X\rangle e_k^j .$$

Les $\Pi_{E_j} X$ sont indépendants par le théorème des coalitions. Enfin $\Pi_{E_j} X \sim \mathcal{N}_n(0, \sigma^2 \Pi_{E_j} {}^t\Pi_{E_j})$,

$$= \mathcal{N}_n(0, \sigma^2 \Pi_{E_j})$$

et $$\frac{1}{\sigma^2}\|\Pi_{E_j} X\|^2 = \sum_{k=1}^{d_j} \underbrace{\frac{1}{\sigma^2}\langle e_k^j, X\rangle^2}_{\frac{1}{\sigma}\langle e_k^j, X\rangle \sim \mathcal{N}(0,1)} \sim \chi^2(d_j)$$

3) Application

Def 20 Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $Y \sim \chi^2(n)$ et $X \perp\!\!\!\perp Y$, $\sqrt{n}\dfrac{X}{\sqrt{Y}}$ suit la loi de Student à n degrés de liberté, notée $T(n)$. Sa densité vaut

$$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

Prop 21 Soit $(X_1, \dots X_n)$ un n-échantillon $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, on définit sa variance empirique par

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2 .$$

Alors $\bar{X}_n$ et $\hat{\sigma}_n^2$ sont indépendantes, et

$$\underbrace{\bar{X}_n \sim \mathcal{N}(m, \tfrac{\sigma^2}{n})}_{\text{trivial}} , \quad \frac{n-1}{\sigma^2} \hat{\sigma}_n^2 \sim \chi^2(n-1) .$$

Dem : On pose $Y = \begin{pmatrix} X_1 - m \\ \vdots \\ X_n - m \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}_n(0, \sigma^2 I_n)$, $u = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

on applique le théorème de Cochran à

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}u \overset{\perp}{\oplus} (\mathbb{R}u)^\perp .$$

$$\to \Pi_{\mathbb{R}u} Y = \frac{\langle u, Y \rangle u}{\|u\|^2} = (\bar{X}_n - m) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \Pi_{(\mathbb{R}u)^\perp} Y = Y - \Pi_{\mathbb{R}u} Y = \begin{pmatrix} X_1 - \bar{X}_n \\ \vdots \\ X_n - \bar{X}_n \end{pmatrix}$$

indépendant

Donc $\bar{X}_n = (\Pi_{\mathbb{R}u} Y)_1 + m$ et

$$\frac{n-1}{\sigma^2} \hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{\sigma^2} \| \Pi_{(\mathbb{R}u)^\perp} Y \|^2$$ sont indépendants.

De plus, $\frac{n-1}{\sigma^2} \hat{\sigma}_n^2 \sim \chi^2(\underbrace{n-1}_{\dim((\mathbb{R}u)^\perp)})$.

Rq : $\mathbb{E}[\frac{n-1}{\sigma^2} \hat{\sigma}_n^2] = \mathbb{E}[\chi^2(n-1)] = n-1$

Donc $\mathbb{E}[\hat{\sigma}_n^2] = \sigma^2$, $\hat{\sigma}_n^2$ est un estimateur sans biais.

Application : $(X_1, \dots, X_n)$ un n-échantillon de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

La conséquence de Prop 21 est que

$$\underbrace{\sqrt{n-1}\,\frac{\overbrace{\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n - m}{\sigma}}^{\mathcal{N}(0,1)}}{\sqrt{\underbrace{\frac{n-1}{\sigma^2}\hat{\sigma}_n^2}_{\chi^2(n-1)}}}}_{= \sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n - m}{\hat{\sigma}_n}} \sim \mathcal{T}(n-1)$$

donc $\sqrt{n}\,\dfrac{\bar{X}_n - m}{\hat{\sigma}_n} \sim \mathcal{T}(n-1)$.

* $IC_{n,\alpha}$ exact de m :

quantile de $\mathcal{T}(n-1)$

$$IC_{n,\alpha}^{(m)} = \left] \bar{X}_n - \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}} \underbrace{t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}}_{q_{1-\frac{\alpha}{2}}}, \bar{X}_n + \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)} \right[$$

$IC_{n,\alpha}$ exact de σ^2 : $\left(\frac{n-1}{\sigma^2}\hat{\sigma}_n^2 \sim \chi^2(n-1) \right)$

On a $\mathbb{P}\left(\frac{n-1}{\sigma^2}\hat{\sigma}_n^2 \in \left] c_{\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}, c_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)} \right[\right) = 1-\alpha$

quantile de $\chi^2(n-1)$

donc $IC_{n,\alpha}(\sigma^2) = \left] \dfrac{(n-1)\hat{\sigma}_n^2}{c_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}}, \dfrac{(n-1)\hat{\sigma}_n^2}{c_{\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}} \right[$

* Si H_0 : " $m = m_0$ " et H_1 : " $m \neq m_0$ " alors un test de niveau α de H_0 contre H_1 est

$$\mathbb{1}_{\bar{X}_n \in \left]-\infty, m - \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}\right[\cup \left] m + \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}, +\infty \right[}$$

TD6 à faire avant la semaine prochaine